Definice: $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t v) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

derivace funkce f v bodě a podle v.

Pozor: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$, kde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-tá pozice}}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Derivace ve směru vektoru v je

$$\frac{\partial f}{\partial w}, \quad \text{kde } w = \frac{v}{\|v\|_2}, \quad v \neq 0.$$

$$\left(\text{Potom } \|w\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1.\right)$$

Definice: nechť ex. $df(a)$. Definujeme **gradient** f v bodě a jako vektor:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right)^T$$

Výpočet: $\bullet$ $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \overbrace{\langle \nabla f(a), v \rangle}^{\text{skalární součin}}$

$$= df(a)(v)$$

Fakt: $\operatorname{grad} f(a)$ je směr největšího růstu funkce f v bodě a.

b) $f(x,y,z) = x^y + yz \qquad \nabla f(a,b,c)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y x^{y-1} \qquad x > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \ln x \, x^y + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y$$

$$\nabla f(a,b,c) = \left(b \cdot a^{b-1},\ \ln a \cdot a^b + c,\ b\right)$$

$$\nabla f(1,1,1) = \left(1 \cdot 1^0,\ \ln 1 \cdot 1^1 + 1,\ 1\right) =$$

$$= (1,1,1)$$ … směr největšího růstu fce f v bodě $(1,1,1)$

Derivace f ve směru $(1,1,1)$ v bodě $(1,1,1)$

$$v = (1,1,1) \qquad w = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|_2} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(1,1,1) = \langle \nabla f(1,1,1), w \rangle =$$

$$= \left\langle (1,1,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

Největší růst je $\sqrt{3}$.

Dokážeme: Velikost největšího růstu f, tj. růstu ve směru grad. je $\|\text{grad} f(a)\|_2$.

$a = (1,2,3) \quad \dots \quad \nabla f(a)$

Velikost největšího růstu f v bodě a.

$$\nabla f(1,2,3) = \left(2\cdot 1^1,\ \ln 1 \dots + 3,\ 2\right) = $$
$$= (2,3,2)$$

$$w = \frac{(2,3,2)}{\|(2,3,2)\|} = \frac{(2,3,2)}{\sqrt{4+9+4}} = \frac{1}{\sqrt{17}}(2,3,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(1,2,3) = \left\langle \nabla f(1,2,3),\ w \right\rangle =$$
$$= \left\langle (2,3,2),\ \frac{1}{\sqrt{17}}(2,3,2) \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot(2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2) = \sqrt{17}\cdot \left(= \|\nabla f(1,2,3)\|\right)$$

$$w = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \quad \dots \text{ derivace v tomto směru.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(a) = \left\langle \nabla f(a),\ w \right\rangle =$$
$$= \left\langle \nabla f(a),\ \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \right\rangle =$$
$$= \|\nabla f(a)\| \cdot \left\| \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \right\| \cdot \cos\alpha$$

α úhel mezi vektory

$$= \|\nabla f(a)\| \cdot 1 \cdot \cos 0 = \|\nabla f(a)\|.$$

$$= \frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\left\langle \nabla f(a),\ \nabla f(a) \right\rangle$$
$$= \frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\cdot \|\nabla f(a)\|^2 = \|\nabla f(a)\|.$$

Tedy velikost největšího růstu f v a je $\|\nabla f(a)\|$. (Právě dok.)

Kdykoliv $u \perp \nabla f(a)$, pak

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = 0$$

4d) $f(x,y) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{y}$ $\quad A = (1, \frac{2}{\pi}, ?)$

$a = (1, \frac{2}{\pi})$

Najděte stacionární body funkcí

4a, b

4d) $f(x,y) = x^2 \cos\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cos\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \cdot \left(-\sin\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} \sin\frac{1}{y}$$

$$f_1(x,y) = 2x\cos\frac{1}{y} = 0 \quad \cdot \text{ —}$$

4c) $f(x,y) = \dfrac{\arcsin y}{x} =$

$$= f_1 = \frac{-\arcsin y}{x^2}$$

$$f_2 = \frac{1}{x\sqrt{1-y^2}}$$

1.) $f(x,y) = x^2 - y^2$

derivaci f v bodě $(1,1)$ ve směru (jednotkového) vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$.

$\left[1-\sqrt{3}\right]$

2) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ … v bodě (a,b) derivaci ve směru vektoru kolmého k vrstevnici procházející bodem (a,b) a směřujícího ven z oblasti touto vrstevnicí ohraničené.

$\left[\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

3) Najděte 1-vektor, v jehož směru funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ v bodě $(1,1)$ největší, nejmenší a nulovou hodnotu

Řekněme, že

$$\nabla f(-1,0,1) = (2,3,5)$$

$$v = (-2,1,-1) \longrightarrow \left[v = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,0,1) = \left\langle \nabla f(-1,0,1), v \right\rangle$$

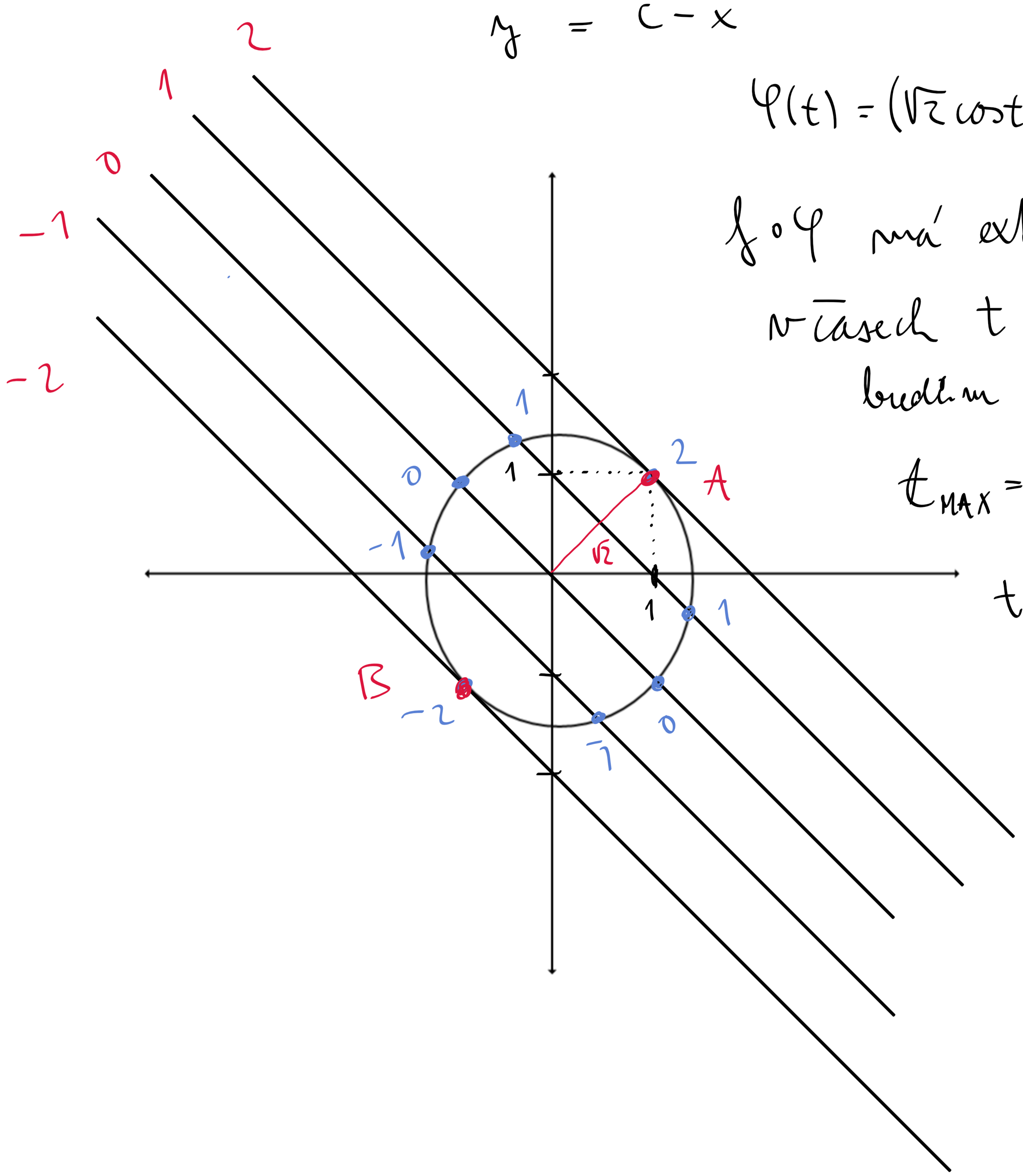
$$= \left\langle (2,3,5), (-1,0,1) \right\rangle = 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 5\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

$f(x,y) = x + y$

$x + y = c$

$y = c - x$

$\varphi(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)$



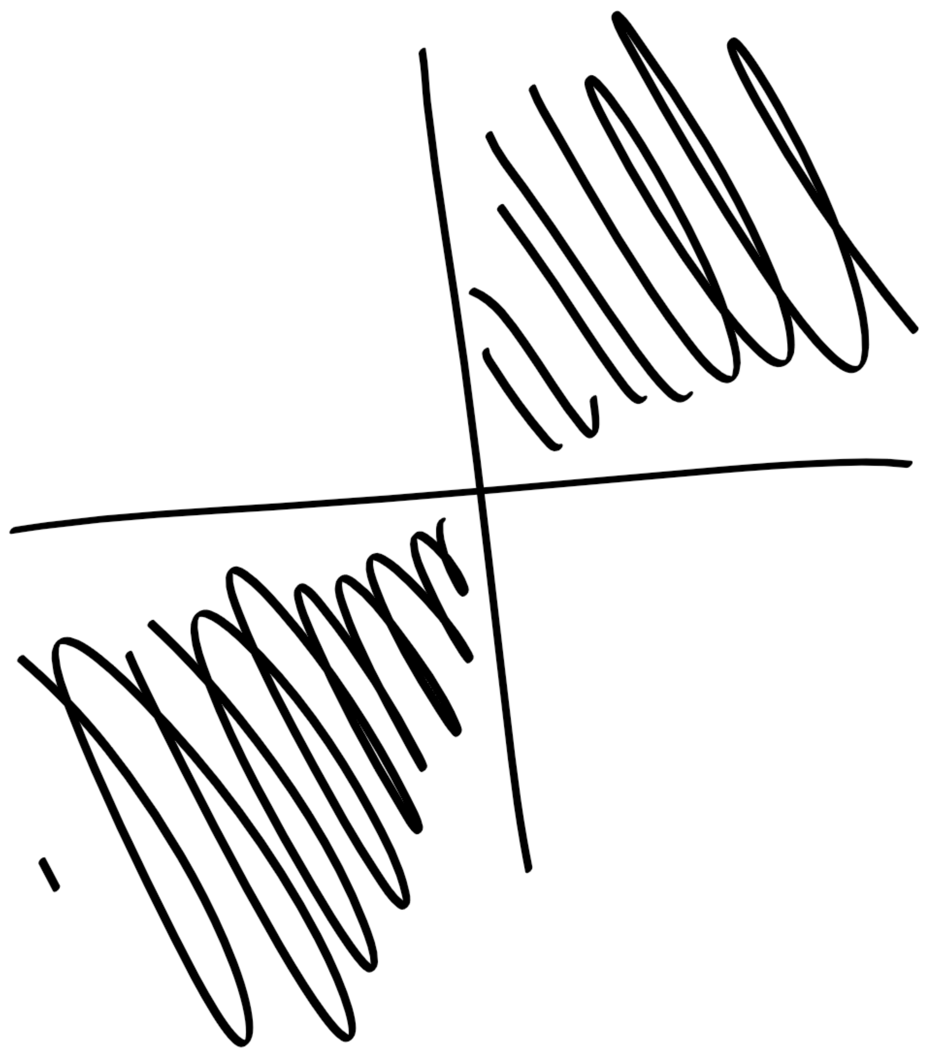
$f \circ \varphi$ má extrémy v časech t příslušných bodům A, B

$t_{MAX} = \frac{\pi}{4}$

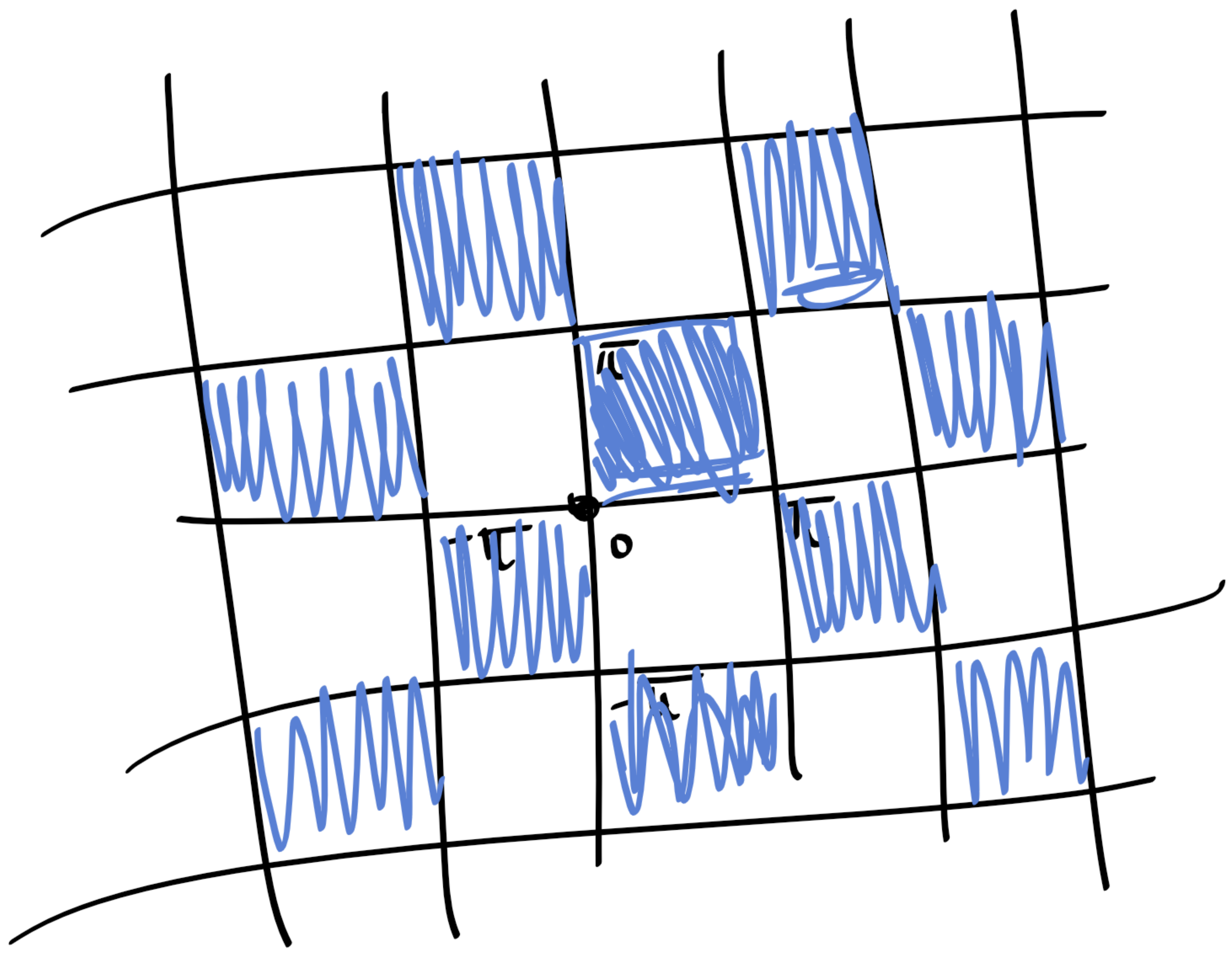
$t_{MIN} = \frac{5\pi}{4}$

Vrstevnice $\{ \operatorname{sgn}(xy) = 1 \} =$

$= \{ xy > 0 \} = 1.$ kv $\cup$ 3 kv. (otevřené)



$\{ \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y) = 1 \}$



$\{ \sin x \cdot \sin y > 0 \}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim \frac{x^2+y^2+1-1}{(x^2+y^2)}$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{0}{0^2+y^2} = \underline{\underline{0}}$$

$y = x$